模块二 位置关系的判定

第 1 节 平行关系证明思路大全（★★）

内容提要

本节主要归纳立体几何大题第一问常见的证明平行关系的思路，先梳理需要用到的一些定理.

①线面平行的判定定理：如图 1，若 $a \not\subset \alpha$，$b \subset \alpha$，$a // b$，则 $a // \alpha$.

②面面平行的判定定理：如图 2，若 $a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$，$a \cap b = P$，$a // \beta$，$b // \beta$，则 $\alpha // \beta$.

③线面平行的性质定理：如图 3，若 $a // \alpha$，$a \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = l$，则 $a // l$.

④面面平行的性质定理 1：如图 4，若 $\alpha // \beta$，$\gamma \cap \alpha = a$，$\gamma \cap \beta = b$，则 $a // b$.

⑤面面平行的性质定理 2：如图 2，若 $\alpha // \beta$，$a \subset \alpha$，则 $a // \beta$.

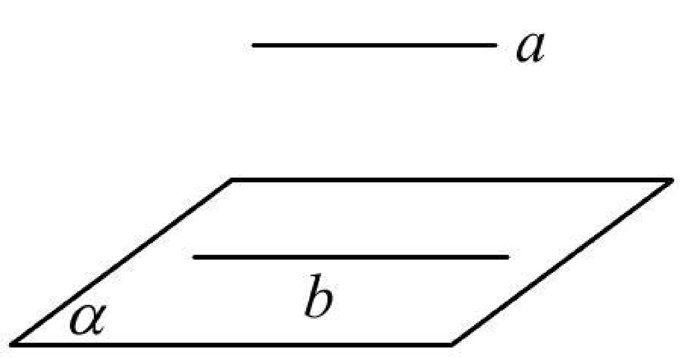


图1

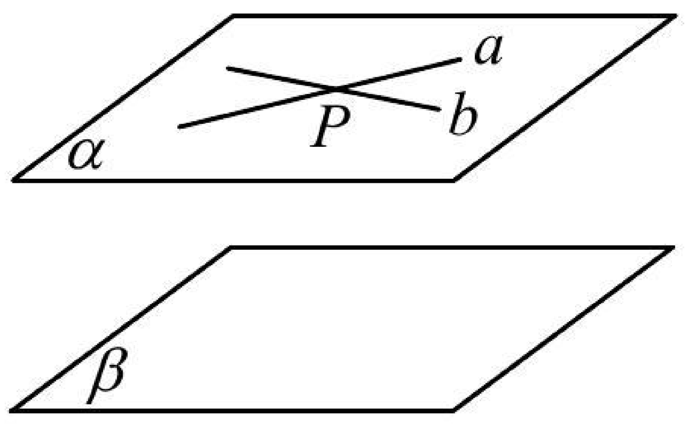


图2

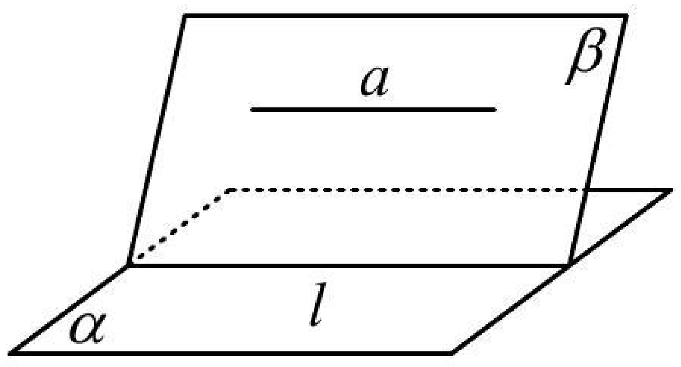


图3

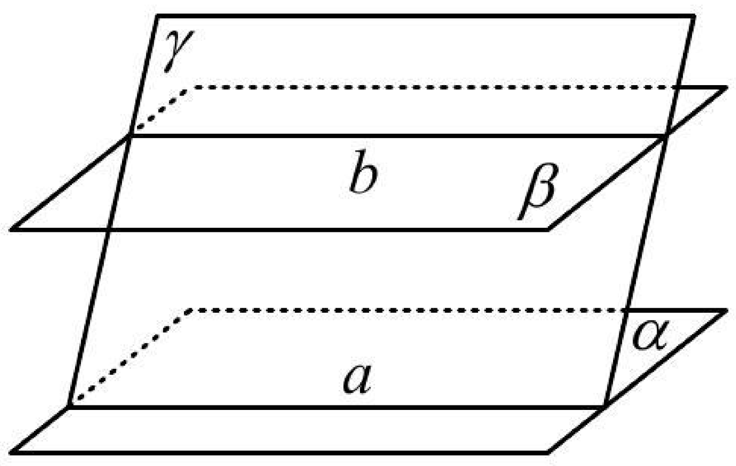


图4

平行关系的证明题中，最常见的是证线面平行，以下是三大作辅助线的思路：

1．找平行四边形：可先在面内作一条与已知直线平行的直线，观察构成的图形像不像平行四边形，若像，就尝试去找理由，进行论证即可.

2．两个重要图形的运用（其原理是上面的线面平行的性质定理，运用时选①还是②，一般看图就知道）

①点线位于面的两侧：如图 5，要证 $AB // \alpha$，可在 α 的另一侧尝试找一点 P，连接 PA，PB，则面 PAB 与 α 的交线就是我们证线面平行要找的 α 内的直线.

②点线位于面的同侧：如图 6，要证 $AB // \alpha$，可在 α 的同侧尝试找一点 P，连接 PA，PB，则面 PAB 与 α 的交线就是我们证线面平行要找的 α 内的直线.

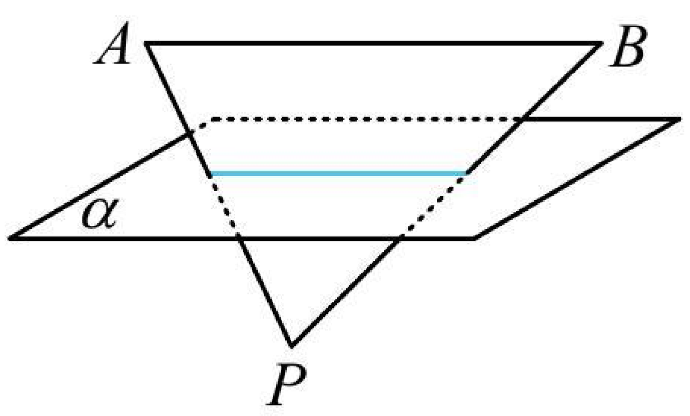


图5

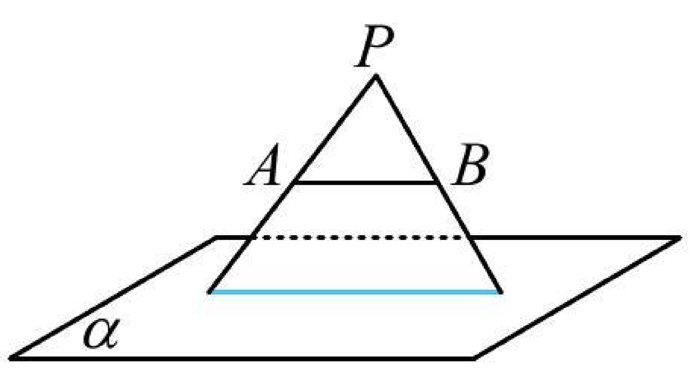


图6

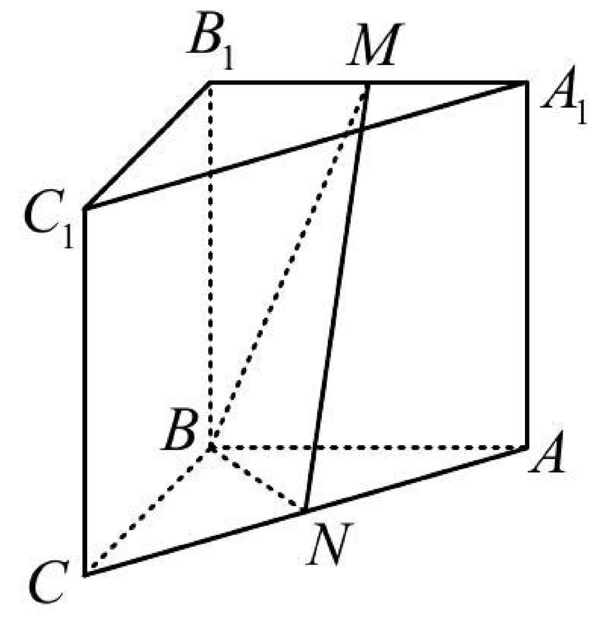
3．造面面平行：若前面的两个方法都不易解决问题，那么还可以考虑通过证面面平行，来证明线面平行.

提醒：本节题目只节选了原题中的 1 个小问，所给条件可能有多余，这些条件是用在其它小问的. 之所以没有把它们去掉，是因为应试时本来也需要我们去判断该用哪些条件去证明结论.

典型例题

类型Ⅰ：找平行四边形

【例 1】（2022•北京卷节选）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为正方形，平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1，$AB = BC = 2$，M，N 分别为 A_1B_1，AC 的中点. 证明：$MN //$ 平面 BCC_1B_1.



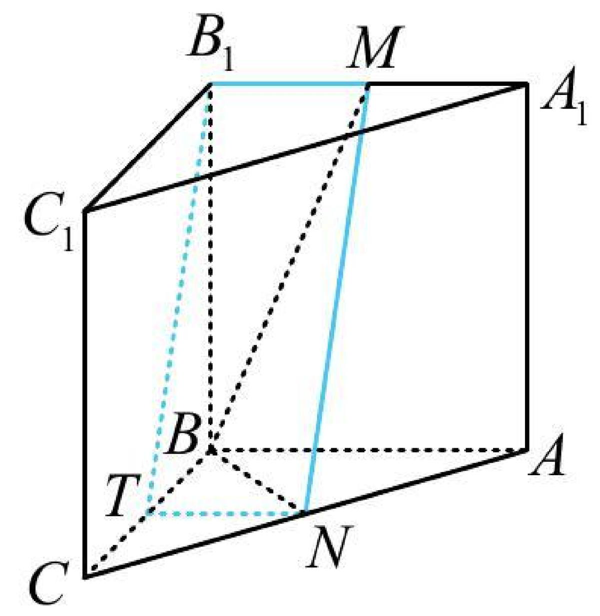
证明：（要证线面平行，先考虑在面内找与已知直线平行的直线，故尝试过 B_1 作 MN 的平行线 B_1T，作出来就发现 B_1MNT 像平行四边形，思路就出来了）

如图，取 BC 中点 T，连接 B_1T，TN，因为 N 是 AC 中点，所以 $TN // AB$ 且 $TN=\dfrac{1}{2}AB$，

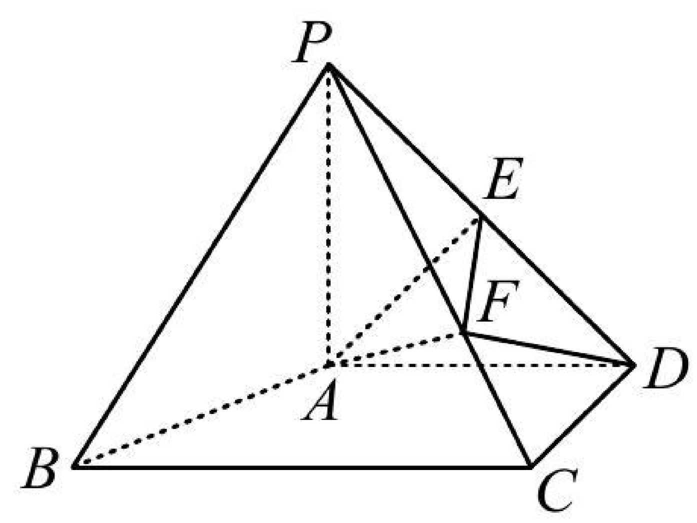
又 M 是 A_1B_1 的中点，所以 $B_1M // AB$ 且 $B_1M=\dfrac{1}{2}AB$，故 $TN // B_1M$ 且 $TN=B_1M$，

所以四边形 B_1MNT 为平行四边形，故 $MN // B_1T$，

因为 $MN \not\subset$ 平面 BCC_1B_1， $B_1T \subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $MN //$ 平面 BCC_1B_1.



【变式 1】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp CD$，$AD//BC$，且 $PA=AD=CD=2$，$BC=3$，E 是 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $PF=2FC$．证明：$DF//$ 平面 PAB.

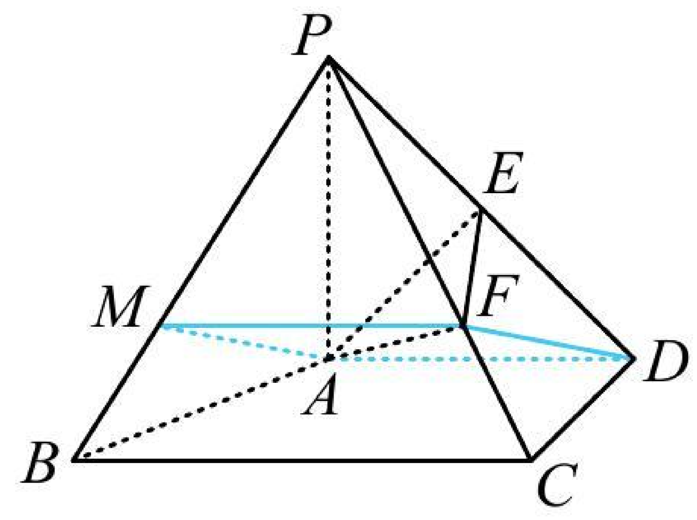


证明：（过 A 作 DF 的平行线交 PB 于 M，$MADF$ 很像平行四边形，但 M 不像是中点，要确定 M 的位置，可逆推，若 $MADF$ 是平行四边形，则 $MF//AD$，而 $AD//BC$，故 $MF//BC$，M 在 PB 上的位置就找到了）

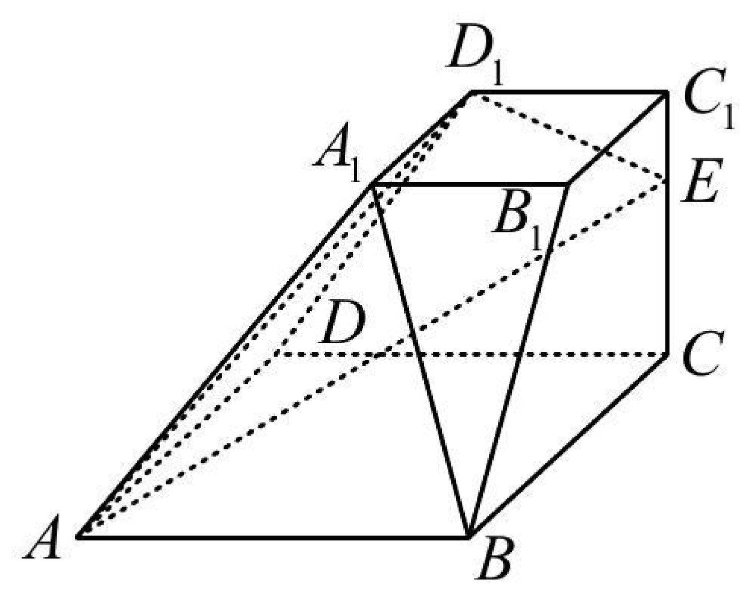
在棱 PB 上取点 M，使 $PM=2MB$，因为 $PF=2FC$，所以 $MF//BC$，且 $MF=\dfrac{2}{3}BC$，

又由题意，$AD//BC$，且 $AD=2$， $BC=3$，所以 $AD=\dfrac{2}{3}BC$，故 $MF//AD$ 且 $MF=AD$，

所以四边形 $MADF$ 是平行四边形，故 $DF//AM$，又 $DF\not\subset$ 平面 PAB，$AM\subset$ 平面 PAB，所以 $DF//$ 平面 PAB.



【变式 2】如图，四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的下底面和上底面分别是边长为 4 和 2 的正方形，侧棱 CC_1 上的点 E 满足 $\dfrac{C_1E}{C_1C}=\dfrac{1}{3}$，证明：直线 $A_1B\,/\!/$ 平面 AD_1E.



证明：（过 D_1 作 A_1B 的平行线，若另一端点取在 AE 上，则其位置不好确定，且不构成平行四边形，这是因为 AD_1E 还不是四棱台的完整截面，得把完整的截面画出来，才能看出端倪，要画此截面，可延长截面 AD_1E 中位于表面的线来扩大截面，所以我们延长 D_1E，找它与棱 DC 的交点）

如图，延长 D_1E，DC 交于点 F，则 F 为面 AD_1E 和面 $ABCD$ 的一个公共点，

又 A 也为此二面的公共点，所以连接 AF 交 BC 于 N，则 AF 即为面 AD_1E 和面 $ABCD$ 的交线，连接 NE，

（截面就补充完整了，此时我们再观察图形，发现 D_1N 就是要找的平行线，下面先论证 N 的位置）

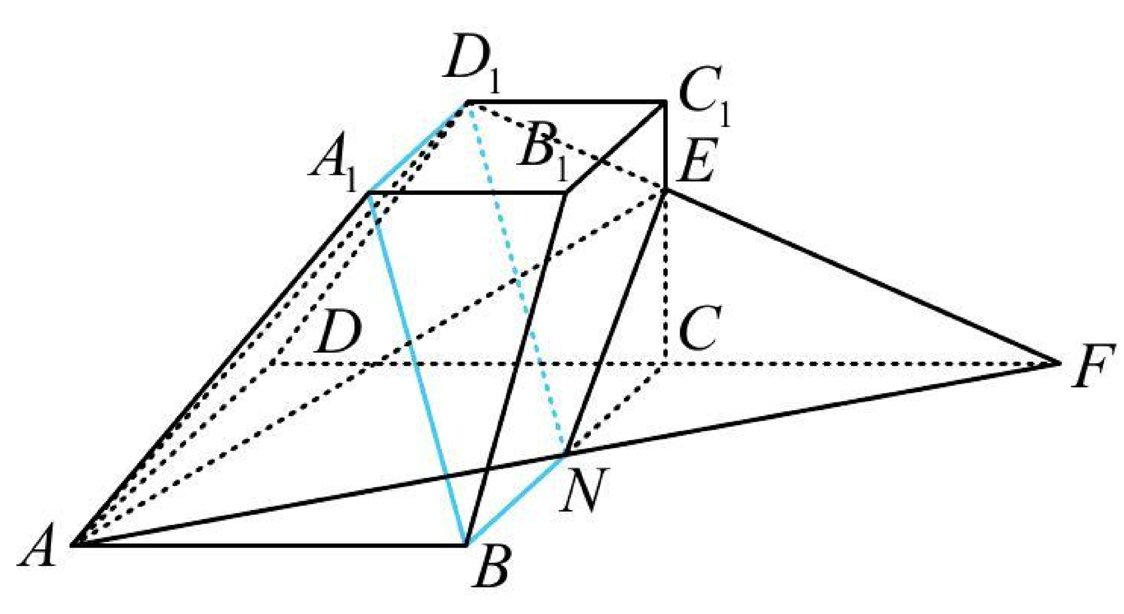
由图可知 $\Delta EC_1D_1 \backsim \Delta ECF$，所以 $\dfrac{C_1D_1}{CF}=\dfrac{C_1E}{CE}=\dfrac{1}{2}$，故 $CF=2C_1D_1=4$，

所以 $CF=AB$，结合 $\angle FCN=\angle ABN=90^\circ$，$\angle CNF=\angle BNA$ 可得 $\Delta ABN \cong \Delta FCN$，所以 $NB=NC$，

从而 N 为 BC 中点，故 $BN=2=A_1D_1$，又 $A_1D_1\,/\!/\,B_1C_1$，$BN\,/\!/\,B_1C_1$，所以 $A_1D_1\,/\!/\,BN$，

从而四边形 A_1D_1NB 是平行四边形，故 $A_1B\,/\!/\,D_1N$，

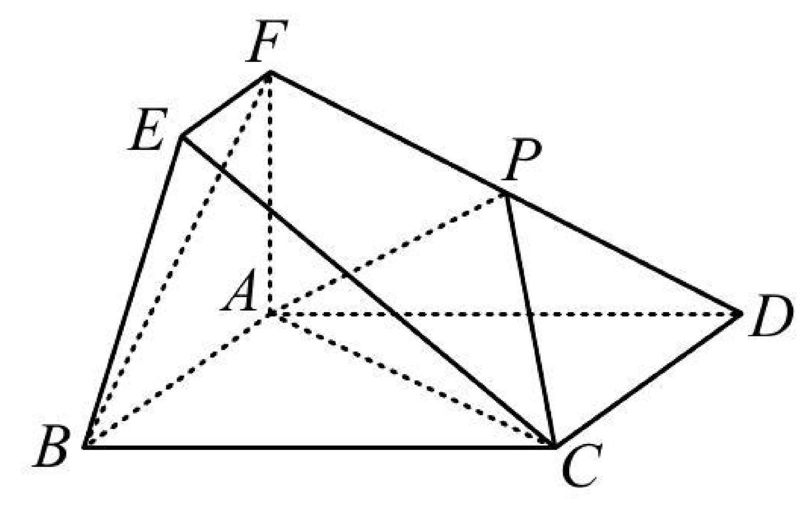
又 $A_1B\not\subset$ 平面 AD_1E，$D_1N\subset$ 平面 AD_1E，所以 $A_1B\,/\!/$ 平面 AD_1E.



【总结】①证线面平行，先尝试找线，可在已知平面内作已知直线的平行线，观察所得图形的特征，如有无平行四边形等；②取中点连线是立几大题里频率最高的辅助线作法，但不是唯一的作法；③若截面不完整，可尝试画出完整截面再观察.

类型Ⅱ：两个重要图形的运用

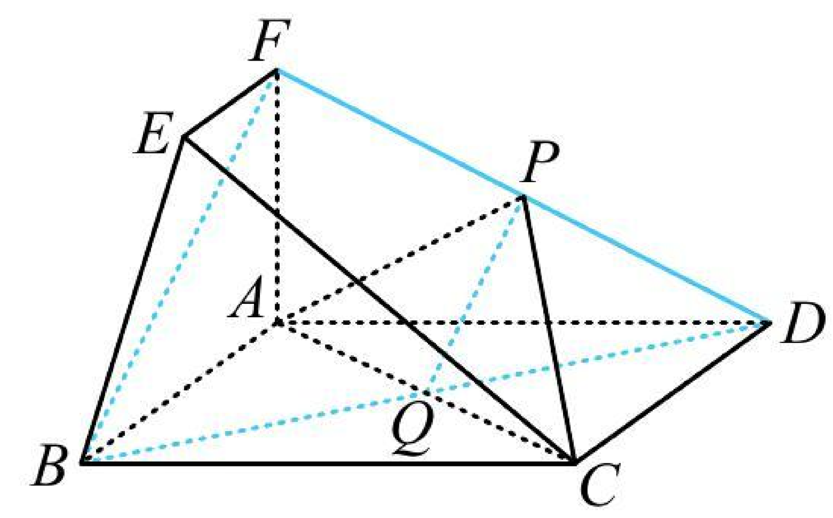
【例 2】如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，$AF\perp$平面 $ABCD$，$EF/\!/AB$，$AD=2$，$AB=AF=2EF=1$，点 P 为 DF 的中点. 证明：$BF/\!/$平面 APC.



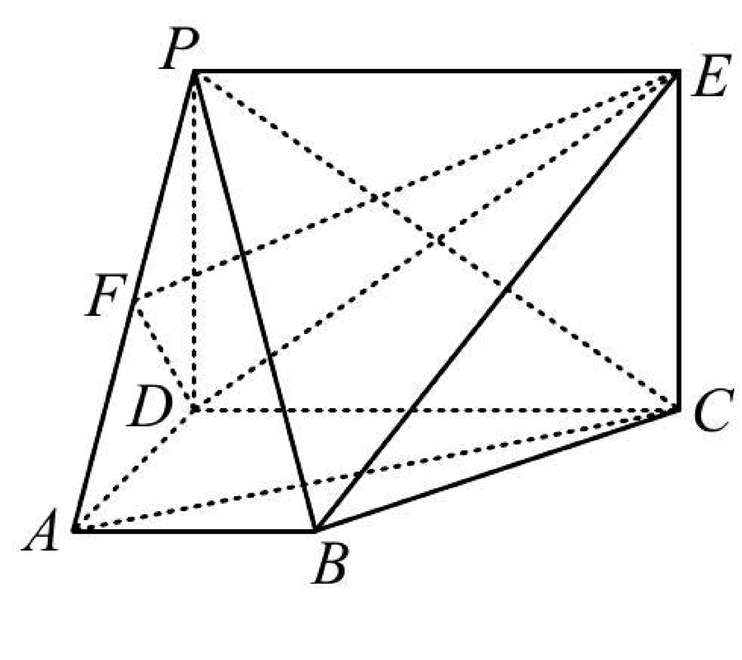
证明：（若过 P 在面内作 BF 的平行线，可发现得到的显然不是平行四边形，那怎么办？我们发现 BF 和 D 分居于面 APC 两侧，由内容提要 2 的①可知只需连接 FD，BD，证明 BF 平行于交线 PQ 即可）

如图，连接 BD 交 AC 于点 Q，连接 PQ，因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 Q 为 BD 中点，

又 P 为 DF 中点，所以 $PQ/\!/BF$，因为 $BF\not\subset$平面 APC，$PQ\subset$平面 APC，所以 $BF/\!/$平面 APC.



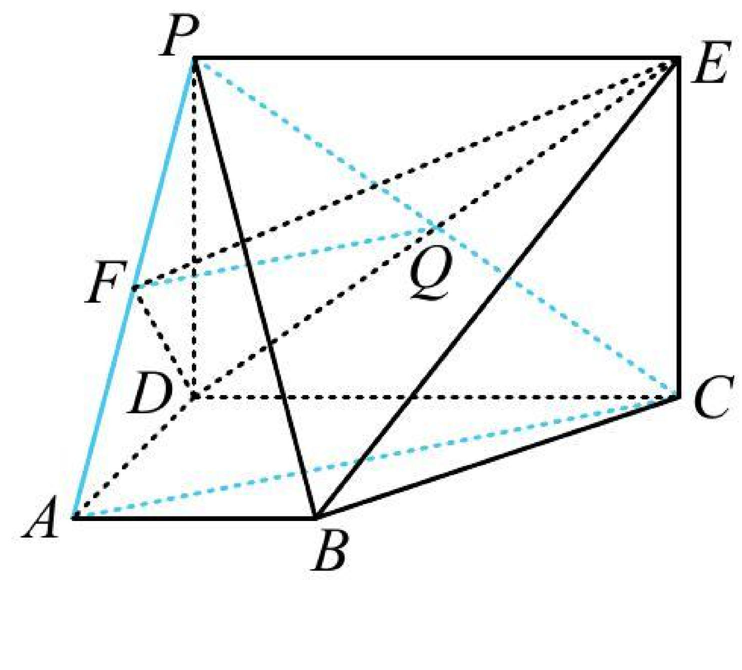
【变式】如图，$PD\perp$梯形 $ABCD$ 所在平面，$\angle ADC=\angle BAD=90^{\circ}$，$F$ 为 PA 的中点，$PD=\sqrt{2}$，$AB=AD=\dfrac{1}{2}CD=1$，四边形 $PDCE$ 为矩形. 证明：$AC/\!/$平面 DEF.



证明：（P 和 AC 位于平面 DEF 两侧，连接端点，交线就出来了）

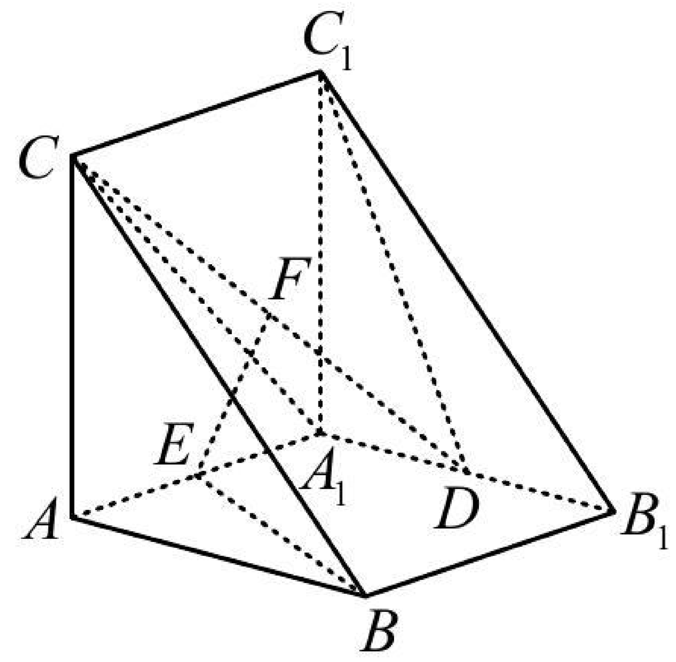
如图，设 $PC\cap DE=Q$，连接 FQ，因为四边形 $PDCE$ 为矩形，所以 Q 为 PC 的中点，

又 F 是 PA 的中点，所以 $FQ/\!/AC$，因为 $AC\not\subset$平面 DEF，$FQ\subset$平面 DEF，所以 $AC/\!/$平面 DEF.



【例 3】（2022 • 天津卷节选）直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AB=AC=2$，$AA_1\perp AB$，$AC\perp AB$，D

为 A_1B_1 中点，E 为 AA_1 中点，F 为 CD 中点，证明：EF // 平面 ABC.



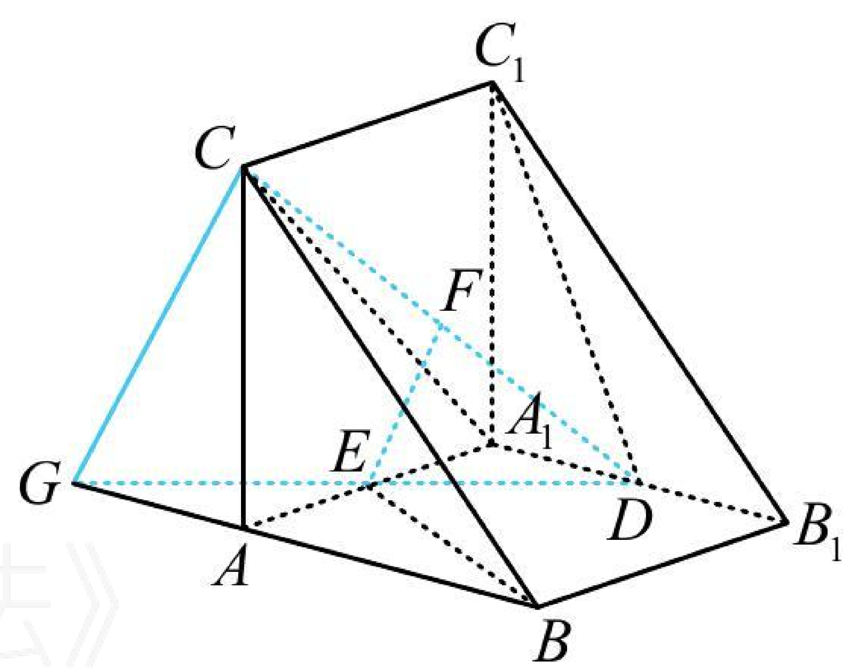
证明：（相对于 EF，面 ABC 的对侧没有点，但观察发现 CF 上有点 D，且 D 和 EF 位于面 ABC 的同侧，符合内容提要 2 中②的重要图形，故连接 DE 并延长，找到与面 ABC 的交点，平行线就作出来了）

如图，延长 DE 和 BA 交于点 G，连接 CG，由题意，面 ABB_1A_1 是矩形，E 为 AA_1 中点，

所以 $\angle EAG=\angle EA_1D=90^{\circ}$，$AE=A_1E$，又 $\angle AEG=\angle A_1ED$，所以 $\Delta AEG\cong\Delta A_1ED$，故 $GE=DE$，

所以 E 为 GD 中点，又 F 是 CD 中点，所以 EF // CG，

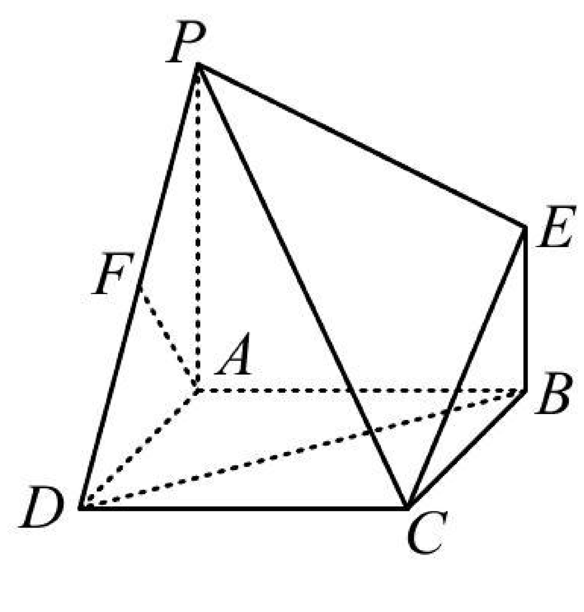
因为 $EF\not\subset$ 平面 ABC，$CG\subset$ 平面 ABC，所以 EF // 平面 ABC.



【总结】可以发现，只要题目中出现了两个重要图形，对应连线就可轻松找到思路.

类型Ⅲ：造面面平行的思路

【例 4】如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，EB // PA，$AB=PA=4$，$EB=2$，F 为 PD 的中点，证明：BD // 平面 PEC.



证明：（过 E 在 ΔPEC 内作 BD 的平行线，不构成平行四边形，同侧与对面也没有点，咋办？这种情况可尝试造面，先找过 B 与面 PEC 平行的直线，可过 B 作 PE 的平行线 BT，则 BT // 面 PEC，接下来只需证 TD // 面 PEC 即可，显然可以猜想 T 为 PA 中点）

如图，取 PA 中点 T，连接 BT，DT，TE，因为 $PA=4$，所以 $PT=2$，又 $EB=2$，所以 $PT=EB$，

结合 EB // PA 可得四边形 $BEPT$ 是平行四边形，所以 BT // PE，

因为 $BT\not\subset$ 平面 PCE，$PE\subset$ 平面 PCE，所以 BT // 平面 PCE ①，

又 $AT=BE=2$，AT // BE，所以四边形 $ABET$ 是平行四边形，故 TE // AB 且 $TE=AB$，

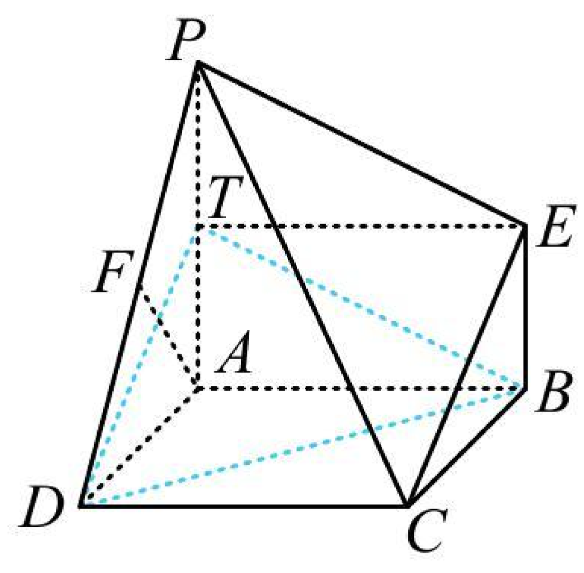
因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $CD // AB$ 且 $CD = AB$，故 $TE // CD$ 且 $TE = CD$，

所以四边形 $CDTE$ 为平行四边形，故 $DT // CE$，

因为 $DT \not\subset$ 平面 PCE，$CE \subset$ 平面 PCE，所以 $DT //$ 平面 PCE ②，

因为 DT，$BT \subset$ 平面 BDT，$DT \cap BT = T$，结合①②可得平面 $BDT //$ 平面 PCE，

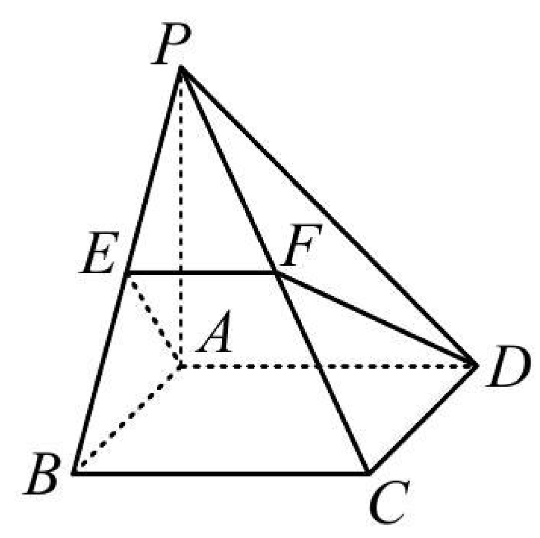
又 $BD \subset$ 平面 BDT，所以 $BD //$ 平面 PCE.



【总结】通过构造面面平行来证线面平行，常见的方法是过线段端点作面的平行线.

类型Ⅳ：线面平行、面面平行的性质定理的应用

【例 5】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，点 F 为棱 PC 上的点，平面 ADF 与棱 PB 交于点 E，证明：$EF // AD$.

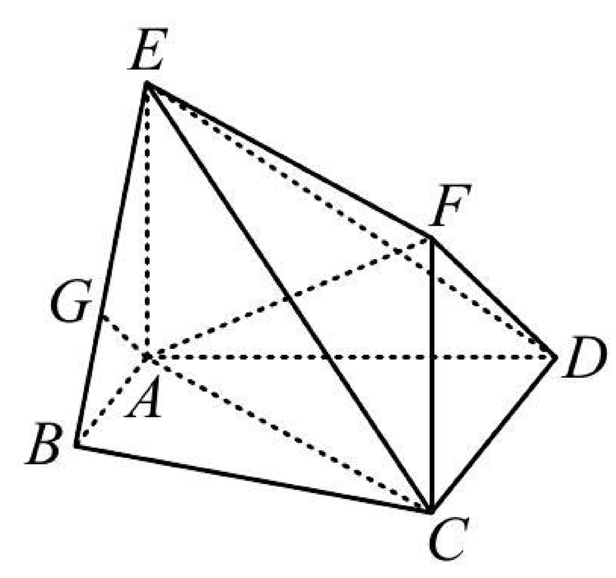


证明：（点 E 是以线面交点的形式给出的，结合要证的是线线平行，可考虑用线面平行或面面平行的性质定理，把 EF 看成平面 ADF 与平面 PBC 的交线，我们发现只需证 $AD //$ 平面 PBC）

因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD // BC$，又 $AD \not\subset$ 平面 PBC，$BC \subset$ 平面 PBC，所以 $AD //$ 平面 PBC，

因为 $AD \subset$ 平面 ADF，平面 $ADF \cap$ 平面 $PBC = EF$，所以 $AD // EF$.

【例 6】如图，矩形 $ACFE$ 中，$AE = 1$，$AE \perp$ 平面 $ABCD$，$AB // CD$，$\angle BAD = 90^{\circ}$，$AB = 1$，$AD = CD = 2$，平面 ADF 与棱 BE 交于点 G，求证：$AG // DF$.



证明：（G 是面 ADF 与棱 BE 交点，意味着 AG 是面 ADF 与面 ABE 的交线，考虑用线面平行或面面平行的性质定理，由图可猜测平面 ABE 与平面 CDF 平行，故用面面平行的性质定理证明结论）

由题意，$ACFE$ 是矩形，所以 $CF // AE$，又 $CF \not\subset$ 平面 ABE，$AE \subset$ 平面 ABE，所以 $CF //$ 平面 ABE ①，

又 $AB // CD$，$CD \not\subset$ 平面 ABE，$AB \subset$ 平面 ABE，所以 $CD //$ 平面 ABE ②，

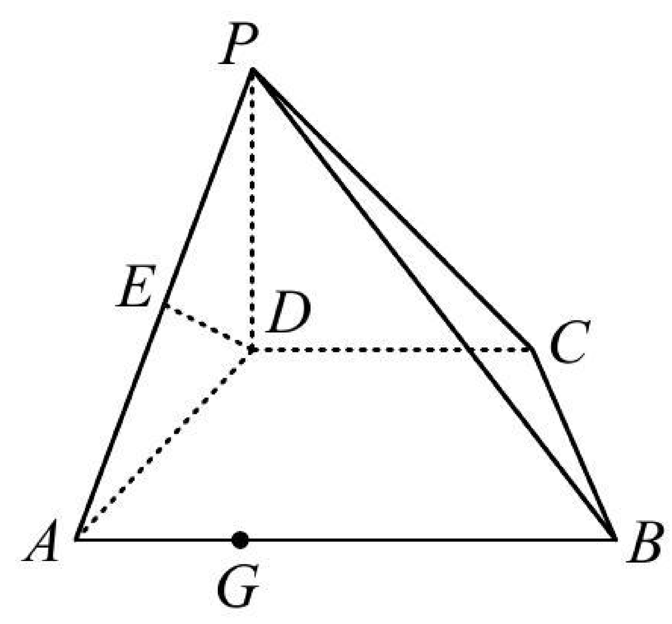
因为 CF，$CD\subset$平面 CDF，$CF\bigcap CD=C$，结合①②可得平面 CDF // 平面 ABE，

由题意，平面 $ADF\bigcap$平面 $CDF=DF$，平面 $ADF\bigcap ABE=AG$，所以 AG // DF.

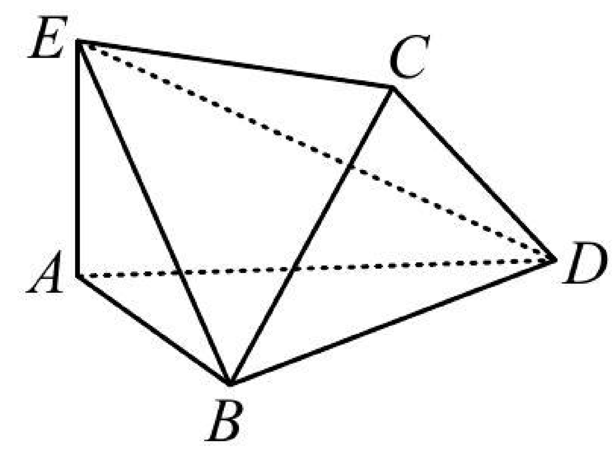
【总结】何时该用线面平行、面面平行的性质定理？①需要证明线线平行；②几何体中存在某条直线是以面面相交，或某个点是以线面交点的形式给出的；③题干已经给出了线面平行或面面平行这类条件. 具备这三个特征中的任何一个，就可以考虑用线面平行、面面平行的性质定理来解决问题.

强化训练

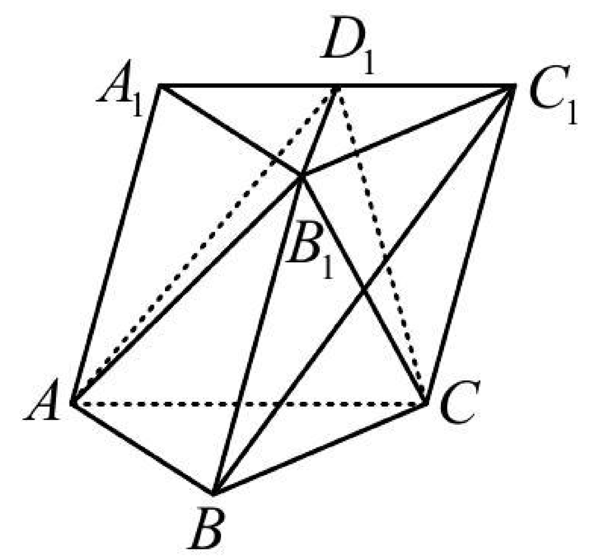
1.（2022·延边一模·★★）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$平面 $ABCD$，AB // CD，$AB\perp AD$，$AB=2CD=2AD=2$，$\angle PAD=45^{\circ}$，E 是 PA 的中点，G 在线段 AB 上，且 $CG\perp BD$，证明：DE // 平面 PBC.



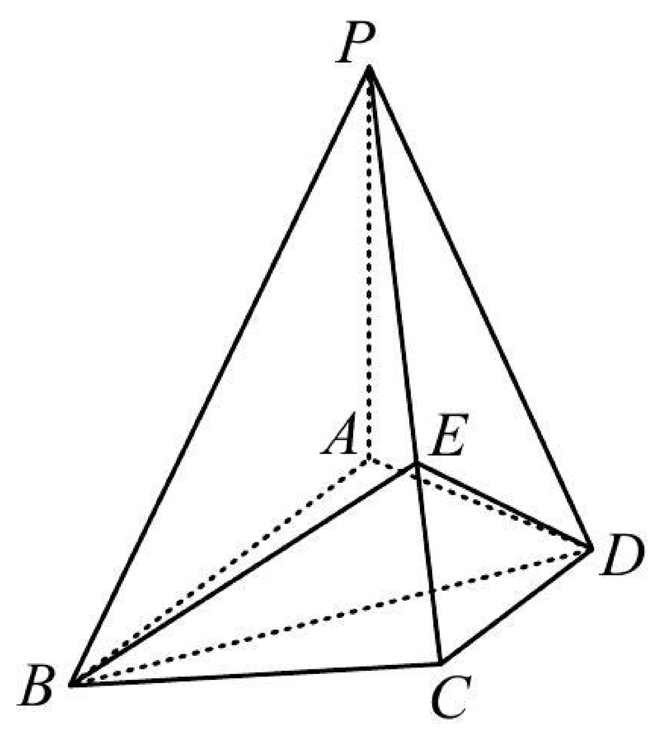
2.（2022·上海模拟·★★）如图，将边长为 2 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，使平面 $ABD\perp$平面 CBD，若 $AE\perp$平面 ABD，且 $AE=\sqrt{2}$，证明：EC // 平面 ABD.



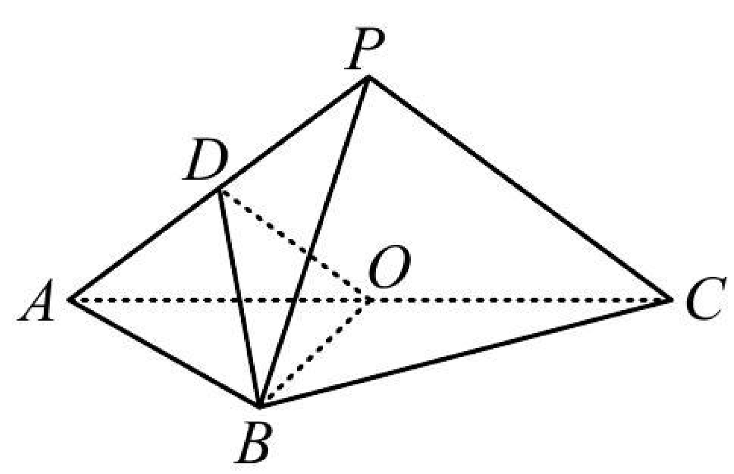
3．（2022 • 河池模拟 • ★★）如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 D_1 为 A_1C_1 的中点，证明：$BC_1 /\!/$ 平面 AB_1D_1.



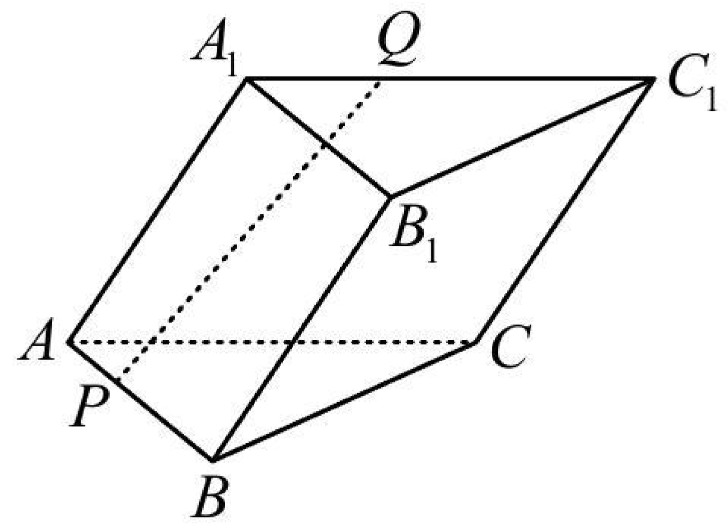
4．（2022 • 哈尔滨模拟 • ★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB /\!/ DC$，$AD\perp AB$，$AB=AP=2$，$DA=DC=1$，E 为 PC 上一点，$PE=\dfrac{2}{3}PC$，证明：$PA /\!/$ 平面 BDE.



5．（2023 • 陕西模拟 • ★★）如图，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$AB=BC$，D 为 PA 的中点，点 O 在 AC 上，且 $OD /\!/$ 平面 PBC，证明：O 为 AC 中点.



7．（★★）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2，$\angle BAC=\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^{\circ}$，$P$，$Q$ 分别在 AB，A_1C_1 上（不包括端点），$AP=A_1Q$，证明：PQ // 平面 BCC_1B_1.



8．（2022·新高考Ⅱ卷节选·★★★）如图，PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E 为 PB 的中点，证明：OE // 平面 PAC.